Saarbrücken 1957

Johannes Gerlach

Die Quantisierung von skalaren, neutralen Teilchen als symmetrische Algebra über einem Hilbertraum

von

Johannes Gerlach

Inauguraldissertation zur Erlangung der Würde eines Doktor rerum naturalium der Universität des Saarlandes

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

40 73/61

Vorwort

Der Gegenstand der Arbeit ergibt sich aus ihrem Titel. Die Lösungsfunktionen der Klein-Gordon-Gleichung, die Einzelteilchenzustände beschreiben, bilden einen Hilbertraum H, einen L_2-Raum, in dem das Skalarprodukt mit Hilfe des " Invarianten Integrals " erklärt ist.

Die Funktionen von n Vektorvariablen, welche n-Teilchenzustände beschreiben, lassen ebenso die Definition eines Hilbertraums H^n zu, dessen Elemente Funktionen von n Vektorvariablen sind.

Die Operationen Multiplikation und Verjüngung, die dann definiert werden, erlauben den Übergang von H^n zu H^{n+k} bzw. umgekehrt.

Um Zustände verschiedener Teilchenzahl zugleich betrachten zu können, wird die direkte Summe $\mathfrak{H}$ aller H^n gebildet. Eine Einschränkung der betrachteten Funktionen ist nun insofern nötig, als die skalaren Teilchen nicht dem Pauliprinzip gehorchen. Daher beschränken wir uns in allen H^n auf symmetrische Funktionen und kommen so zur Bildung einer symmetrischen Algebra $S\mathfrak{H}$ (Algebra insofern, als Produktbildung mit Funktionen aus H^n möglich ist).

Mittels Produktbildung und Verjüngung mit einer Funktion von einer Variablen werden nun Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren definiert, die von H^n zu H^{n+1} überführen bzw. umgekehrt, und die, wie gezeigt wird, Vertauschungsregeln genügen, die denen der Feldtheorie sehr ähnlich sind.

Zu den Operatoren der Feldtheorie kommt man schliesslich, indem man die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für eine

uneigentliche Funktion $\Delta^+(\overline{x})$ definiert. Der daraus gebildete Feldvektor genügt der quantenmechanischen Vertauschungsregel. Schliesslich wird noch der Energie-Impuls-Operator als Infinitesimaloperator definiert und die Lorentzinvarianz der Theorie untersucht.

Das Thema dieser Arbeit wurde mir von meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. D. KASTLER gestellt, an dessen Arbeiten sie sich anschliesst. Für die zahlreichen Anregungen und Hinweise, die Herr Prof. Dr. D. KASTLER mir bei der Anfertigung dieser Arbeit gegeben hat, möchte ich ihm herzlich Dank sagen.

Im Oktober 1957

der Verfasser

E i n l e i t u n g

Die folgenden Untersuchungen werden im 4-dimensionalen Minkowskiraum M , dessen Elemente mit $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{k}$,... bezeichnet werden, ausgeführt.

Das Skalarprodukt in M sei $(\bar{x}, \bar{y})$.

Ist $\bar{e}_i$, i = o, 1, 2, 3 eine Lorentzbasis, $\bar{x} = x^i \bar{e}_i$ (über doppelte Indizes wird summiert) die Koordinatendarstellung des Vektors $\bar{x}$ in der Basis $\bar{e}_i$, so gilt

$$(1) \qquad (\bar{x}, \bar{x}) = -x^{o\,2} + x^{1\,2} + x^{2\,2} + x^{3\,2}$$

Der Übergang von einer Lorentzbasis zur anderen wird durch eine Lorentztransformation L vermittelt, die den Ausdruck (1) unverändert lässt.

Die Matrix (a^i_k) einer Lorentztransformation erfüllt folgende Orthogonalitätsrelationen:

a) Relationen für die Spalten:

$$(2) \quad \begin{aligned} -a^{o\,2}_o + a^{1\,2}_o + a^{2\,2}_o + a^{3\,2}_o &= -1 \\ -a^{o\,2}_i + a^{1\,2}_i + a^{2\,2}_i + a^{3\,2}_i &= +1 \qquad i = 1, 2, 3 \\ -a^o_i a^o_k + a^1_i a^1_k + a^2_i a^2_k + a^3_i a^3_k &= o \qquad i \neq k \end{aligned}$$

b) Entsprechende Relationen gelten für die Zeilen.

c) Die Matrix (a^i_k) hat noch folgende Eigenschaften:

$$\text{Det}\,(a^i_k) = \pm 1 \qquad |a^o_o| \geq 1 \qquad |\underset{i,k=1,2,3}{\text{Det}}\,(a^i_k)| \geq 1$$

Für die eigentlichen Lorentztransformationen, die im folgenden

allein berücksichtigt werden, gilt in der ersten dieser Gleichungen das positive Vorzeichen, die zweite und dritte Gleichung gelten sogar ohne Absolutstriche. (vgl. (5))

Die Klein-Gordon-Gleichung

M sei auf eine Lorentzbasis $\bar{e}_i$ bezogen. Wendet man aufdie relativistische Beziehung zwischen Energie und Impuls

$$(3) \qquad E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

(E = Energie, p = Impuls, c = Lichtgeschwindigkeit, m = Masse des Teilchens) die Quantisierungsregel an, die verlangt, dass man in (3) E durch den Operator $i \hbar c \frac{\partial}{\partial x^0}$, p durch den Operator $-i \hbar$ grad ersetzt, und den so entstandenen Operator auf eine Wellenfunktion $\psi(\bar{x})$ wirken lässt, so erhält man die Klein-Gordongleichung

$$(4) \qquad \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^{0 2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{1 2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{2 2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{3 2}} - \mu^2 \right] \psi(\bar{x}) = 0 ,$$

wenn man in dem aus (3) gewonnenen Ausdruck noch durch $\hbar^2 c^2$ dividiert und $\frac{m c}{\hbar} = \mu$ setzt. ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$, wobei h das Plancksche Wirkungsquant ist).

Die Form der Klein-Gordon-Gleichung ändert sich nicht bei Änderung der Lorentzbasis. Ist nämlich $x'^i = a^i_k x^k$ die Transformation der Koordinaten, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = a^k_i \frac{\partial}{\partial x'^i} , \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^{i 2}} = a^k_i a^l_i \frac{\partial^2}{\partial x'^k \partial x'^l}$$

Der in (4) auftretende Differentialoperator wird übergeführt in

$$\left(-a_0^k \; a_0^\ell + a_1^k \; a_1^\ell + a_2^k \; a_2^\ell + a_3^k \; a_3^\ell \right) \frac{\partial^2}{\partial x'^k \partial x'^l}$$

Wegen der Orthogonalitätsrelationen (2) erhält man daraus

$$-\frac{\partial^2}{\partial x'^{0^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x'^{1^2}} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x'^{3^2}} \; .$$

Eine spezielle Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist die Funktion

$$(5) \quad f(\bar{k}) \; e^{i(\bar{k},\bar{x})} \; ,$$

falls der Vektor $\bar{k}$ die Gleichung

$$(6) \quad (\bar{k},\bar{k}) + \mu^2 = 0$$

erfüllt. Man beweist das durch Einsetzen in (4)

Das invariante Integral

Weitere Lösungen von (4) erhält man durch Linearkombination von Lösungen (5) mit verschiedenen $\bar{k}$-Werten. Wir bedienen uns dazu eines bestimmten Integrals, das bei Änderung der Lorentzbasis seine Form nicht ändert.

Ist eine skalare Funktion $f(\bar{k})$ gegeben, so hat das Integral

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(k^i \bar{e}_i + \bar{e}_0 \sqrt{\vec{k}^2+\mu^2}) + f(k^i \bar{e}_i - \bar{e}_0 \sqrt{\vec{k}^2+\mu^2}) \right] \frac{dk_1 dk_2 dk_3}{\sqrt{\vec{k}^2+\mu^2}}$$

die oben angegebenen Eigenschaften. Zur Abkürzung wird folgende Bezeichnungsweise verwendet.

$$\vec{k} = k^i \bar{e}_i \quad i=1,2,3 \qquad \vec{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

Die Gleichung $k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2+\mu^2}$ ist die nach k_0 aufgelöste

Gleichung (6). Man bezeichnet (6) als das Massenhyperboloid.

Zum Beweis von (7) werden zweidimensionale Lorentztransformationen herangezogen. Im zweidimensionalen Minkowskiraum wird eine eigentliche Lorentztransformation vermittelt durch die Matrix $\begin{pmatrix} Ch\varphi & Sh\varphi \\ Sh\varphi & Ch\varphi \end{pmatrix}$. Der Ubergang von φ zu $-\varphi$ liefert die inverse Transformation. Die Vektoren auf dem positiven Ast des Massenhyperboloids werden wie folgt transformiert:

$$x'^0 = Ch\varphi\sqrt{x^{1\,2}+\mu^2} + Sh\varphi\, x^1 \qquad x^0 = Ch\varphi\sqrt{x'^{1\,2}+\mu^2} - Sh\varphi\, x'^1$$

$$x'^1 = Sh\varphi\sqrt{x^{1\,2}+\mu^2} + Ch\varphi\, x^1 \qquad x^1 = -Sh\varphi\sqrt{x'^{1\,2}+\mu^2} + Ch\varphi\, x'^1$$

Man sieht, dass der positive Ast des Massenhyperboloids durch eigentliche Lorentztransformationen in sich überführt wird:
$\sqrt{x'^{1\,2}+\mu^2} = x'^0 = (\sqrt{x^{1\,2}+\mu^2})'$.

Der Satz über die Variablenänderung unter dem Integral liefert

$$\int_a^b f(x^1\bar{e}_1 + \bar{e}_0\sqrt{x^{1\,2}+\mu^2})\,\frac{dx^1}{\sqrt{x^{1\,2}+\mu^2}} =$$

$$\int_{x'^1(a)}^{x'^1(b)} f(x'^1\bar{e}'_1 + \bar{e}'_0\sqrt{x'^{1\,2}+\mu^2})\,\frac{1}{\sqrt{x^{1\,2}+\mu^2}}\,\frac{dx^1}{dx'^1}\,dx'^1$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber gleich

$$\int_{x'^1(a)}^{x'^1(b)} f(\bar{e}'_1 x'^1 + \bar{e}'_0\sqrt{x'^{1\,2}+\mu^2})\,\frac{dx'^1}{\sqrt{x'^{1\,2}+\mu^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^{1\,2}+\mu^2}}\,\frac{dx^1}{dx'^1} = \frac{1}{\sqrt{x^{1\,2}+\mu^2}}\cdot\frac{Ch\varphi\sqrt{x'^{1\,2}+\mu^2} - Sh\varphi\, x'^1}{\sqrt{x'^{1\,2}+\mu^2}} =$$

$$\frac{1}{Ch\varphi\sqrt{x'^{1\,2}+\mu^2} - Sh\varphi\, x'^1}\cdot\frac{Ch\varphi\sqrt{x'^{1\,2}+\mu^2} - Sh\varphi\, x'^1}{\sqrt{x'^{1\,2}+\mu^2}}$$

Der letzte Ausdruck ist aber gleich $\frac{1}{\sqrt{x'^1{}^2 + \mu^2}}$. Lässt man nun a und b gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ gehen, so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{e}_1 x^1 + \bar{e}_0 \sqrt{x^1{}^2 + \mu^2}) \frac{dx^1}{\sqrt{x^1{}^2 + \mu^2}} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{e}'_1 x'^1 + \bar{e}'_0 \sqrt{x'^1{}^2 + \mu^2}) \frac{dx'^1}{\sqrt{x'^1{}^2 + \mu^2}}$$

Ein Satz aus der Theorie der Lorentztransformationen besagt, dass man jede 4-dimensionale eigentliche Lorentztransformation als Produkt von drei zweidimensionalen eigentlichen Lorentz - transformationen darstellen kann, die jeweils eine Raum- und die Zeitkoordinate bewegen, und einer orthogonalen Transformation der Raumkoordinaten allein. Zusammen mit dem Satz von Fubini über die Nacheinanderausführung von Integrationen folgt damit auch die Gültigkeit obiger Invarianz für den 4-dimensionalen Minkowskiraum. Dasselbe gilt für den negativen Zweig des Massenhyperboloids.

Für das invariante Integral (7) wird die Bezeichnung eingeführt:

$$(8) \qquad \int_{C_\mu} f(\bar{k})\, d\sigma_{\bar{k}}$$

Die Funktion

$$(9) \qquad \psi(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{C_\mu} f(\bar{k})\, e^{i(\bar{k},\bar{x})}\, d\sigma_{\bar{k}}$$

ist unter bestimmten Konvergenzbedingungen für $f(\bar{k})$ Lösung der Klein-Gordon-Gleichung.

Beweis: $$\psi(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[f(\vec{k} + \bar{e}_0 \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2})\, e^{i(-\sqrt{\vec{k}^2+\mu^2} x_0 + \vec{k}\vec{x})}$$

$$+ f(\vec{k} - \bar{e}_0 \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2})\, e^{i(\sqrt{\vec{k}^2+\mu^2} x_0 + \vec{k}\vec{x})} \Big] \frac{dk^1 dk^2 dk^3}{\sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2}}$$

Daraus folgt: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{o2}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{C_\mu} -(\vec{k}^2 + \mu^2)\, f(\bar{k})\, e^{i(\bar{k},\bar{x})}\, d\sigma_k$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{i2}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{C_\mu} k^{i2}\, f(\bar{k})\, e^{i(\bar{k},\bar{x})}\, d\sigma_k$$

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{o2}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{12}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{22}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{32}} - \mu^2 =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{C_\mu} (\vec{k}^2 + \mu^2 - \vec{k}^2 - \mu^2)\, f(\bar{k})\, e^{i(\bar{k},\bar{x})}\, d\sigma_k = o$$

Diese Herleitung gilt unter der Voraussetzung, dass $(\vec{k}^2 + \mu^2)\, f(\bar{k})$ in unserem Sinne integrierbar ist, denn man darf dann unter dem Integralzeichen differenzieren.

$$\frac{\Delta \psi(\bar{x})}{\Delta x^o} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{C_\mu} f(\bar{k})\, e^{i(\bar{k},\bar{x})} \left[\frac{e^{-ik^o h} - 1}{h}\right] d\sigma_k$$

$$\left| \int_{C_\mu} f(\bar{k}) e^{i(\bar{k},\bar{x})} \left[\frac{e^{-ik^o h} - 1}{h}\right] d\sigma_k - \int_{C_\mu} -k^o\, f(\bar{k})\, e^{i(\bar{k},\bar{x})} d\sigma_k \right|$$

$$\leqslant \int_{C_\mu} |f(\bar{k})| \left| \frac{e^{-ik^o h} - 1 + k^o h}{h} \right| d\sigma_k \xrightarrow{h \to o} o \quad , \text{ denn}$$

$$\left| \frac{e^{-ik^o h} - 1 + k^o h}{h} \right| \downarrow o \quad \text{für} \quad h \to o \,.$$

Es sei $-k^o h = u$. Dann gilt

$$\left| \frac{e^{iu} - 1 - u}{u} \right| |k^o| = |k^o| \left| \frac{(\cos u - 1)^2 + (\sin u - u)^2}{u^2} \right|^{1/2} =$$

$$|k^o| \left| \frac{\sin^2 \frac{u}{2}}{(\frac{u}{2})^2} \sin^2 \frac{u}{2} + \left(\frac{\sin u}{u} - 1 \right)^2 \right|^{1/2}$$

Beide Summanden streben monoton gegen Null, wenn u gegen Null geht. In diesem Fall strebt das Integral gegen Null.

Der Raum H

Wir betrachten im folgenden Funktionen $f(\bar{k})$, für die gilt:

1) $f(\vec{k} - \bar{e}_o\sqrt{\vec{k}^2+\mu^2}) = o$

2) $f(\vec{k} + \bar{e}_o\sqrt{\vec{k}^2+\mu^2})$ ist messbar

3) $\int_{C_\mu} f^* f \; d\sigma_{\bar{k}}$ existiert.

[4) $\int_{C_\mu} f\cdot(\vec{k}^2+\mu^2) \; d\sigma_{\bar{k}}$ existiert.]$^{1)}$

Die Menge dieser Funktionen wird mit H bezeichnet. Messbarkeit und Integrierbarkeit sind von der gewählten Lorentzbasis unabhängig. Das ist eine Folge der Möglichkeit der Integration durch Substitution.

Für das invariante Integral gilt die Schwarzsche Ungleichung

$$(1o) \qquad \left| \int_{C_\mu} f_1 f_2 \; d\sigma_{\bar{k}} \right|^2 \leq \int_{C_\mu} |f_1|^2 d\sigma_{\bar{k}} \int_{C_\mu} |f_2|^2 d\sigma_{\bar{k}}$$

Für die Funktionen $f(\bar{k})$ definieren wir folgendes Skalarprodukt:

$$(11) \qquad (f_1, f_2) = \int_{C_\mu} f_1^* f_2 \; d\sigma_k = \left(\psi_1(\bar{x}), \psi_2(\bar{x})\right)$$

Aus der Definition folgt sofort, dass das Skalarprodukt linear im zweiten Faktor, antilinear im ersten Faktor ist, und dass $(f,f) \geq o$ ist. Da das invariante Integral bis auf den nicht verschwindenden Faktor $\frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2+\mu^2}}$ ein gewöhnliches

1) 1) 2) 3) definieren H 4) kennzeichnet eine Untermenge von H.

Lebesgues'sches Integral ist, gilt auch, dass f fast überall auf dem positiven Ast des Massenhyperboloids verschwindet, wenn (f,f) = o ist. Im Raum H wird folgende Norm eingeführt:

$$(12) \qquad \|f\|^2 = (f,f)$$

H ist ein Vektorraum, denn mit f_1 und f_2 ist auch eine Linearkombination dieser beiden Funktionen in H enthalten. In H gilt ferner der Satz von Riesz-Fischer, dass H bezüglich der Norm (12) vollständig ist, d.h. dass jede Cauchyfolge in H konvergiert. Der Beweis verläuft analog dem Beweis für den gewöhnlichen L_2-Raum.

Der Raum H^n

Das invariante Integral (7) kann man auch sinngemäss für Funktionen von n Vektorvariabeln erklären, wobei diese Funktionen $f(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\ldots,\bar{k}_n)$ ebenfalls auf dem negativen Ast des Massenhyperboloids verschwinden und analoge Eigenschaften haben sollen wie $f(\bar{k})$.

$$(13) \qquad \int_{C_\mu} f(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\ldots,\bar{k}_n)\, d\sigma_{k_1} d\sigma_{k_2} \ldots d\sigma_{k_n} =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{e}_i k_1^i + \bar{e}_o\sqrt{\vec{k}_1^2+\mu^2},\ldots,\bar{e}_i k_n^i + \bar{e}_o\sqrt{\vec{k}_n^2+\mu^2}) \frac{dk_1^1\ldots dk_n^3}{\sqrt{\vec{k}_1^2+\mu^2}\ldots\sqrt{\vec{k}_n^2+\mu^2}}$$

Die bezüglich dieses Integrals quadratisch integrierbaren Funktionen bilden einen Hilbertraum H^n, wenn man das Skalarprodukt

$$(14) \qquad (f_1(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_n), f_2(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_n)) = \int_{C_\mu} f_1^* f_2\, d\sigma_{k_1}\ldots d\sigma_{k_n}$$

einführt. Alles über H gesagte gilt sinngemäss auch für H^n.

Wegen des Satzes von Fubini bleibt auch die Invarianz des Integrals (13) gegenüber Änderung der Lorentzbasis erhalten.

Beziehungen zwischen den Räumen H^n

Ist $f(\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_p)$ ein Element von H^p, $g(\bar{k}_{p+1} \ldots \bar{k}_n)$ ein Element von H^{n-p}, so ist $f \cdot g$ ein Element aus H^n und es gilt $\|f\| \cdot \|g\| = \|f \cdot g\|$ und noch allgemeiner $(f_1 g_1, f_2 g_2) = (f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2)$.

1) Aus f und g integrierbar folgt, dass auch fg integrierbar ist. Sind nämlich f und g Treppenfunktionen über $\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_p$ bzw. $\bar{k}_{p+1}, \ldots, \bar{k}_n$, so ist fg Treppenfunktion über $\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n$. Als solche ist sie integrierbar und ihr Integral ist das Produkt der beiden Integrale über f und g. Dieses Resultat wird nun in der üblichen Weise auf die beiden Klassen C_1 (Funktionen, die fast überall Grenzwerte einer steigenden Folge von Treppenfunktionen sind) und C_2 (Linearkombinationen von Funktionen aus C_1) erweitert. Die quadratische Integrierbarkeit des Produktes folgt dann sofort, da $(fg)^2 \leq f^2 g^2$ ist. Ebenso ist mit f und g auch fg messbar.

2) Die Aussagen über Norm und Skalarprodukt sind eine Folge des Satzes von Fubini.

Aus dem obigen Satz folgt insbesondere, dass das Produkt von n Funktionen aus H^1 ein Element von H^n ist. Also

$$f_i(\bar{k}_i) \in H^1 \quad \rightsquigarrow \quad f_1(\bar{k}_1) \cdot \ldots \cdot f_n(\bar{k}_n) \in H^n$$

Wenn wir mit h^n die Menge aller Linearkombinationen der Produkte von n Funktionen aus H bezeichnen, so ist H^n die bezüglich $\|\ \|$ abgeschlossene Hülle von h^n. Der Beweis findet sich im Anhang von (1).

Die Operation Verjüngung wird wie folgt definiert: Sei $f(\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_{n+p})$ ein Element aus H^{n+p}, $g(\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n)$ ein Element aus H^n. Dann ist

$$(15) \qquad g^*(f) = \int_{C_\mu} f(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n, \bar{k}_1 \ldots \bar{k}_p)\, g^*(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)\, d\sigma_{\bar{x}_1} \ldots d\sigma_{\bar{x}_n}$$

die mit g verjüngte Funktion f. Die Existenz dieses Integrals ist durch den Satz von Fubini gesichert.

Der durch (15) definierte Ausdruck ist eine Funktion von $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_p$. Sie gehört H^p an.

Beweis: Um die Schreibweise zu vereinfachen, wird der Beweis für den Fall zweier Vektorvariablen geführt.

$$g^*(f) = \int_{C_\mu} f(\bar{x}, \bar{k})\, g^*(\bar{x})\, d\sigma_{\bar{x}}$$

Wegen des Satzes von Fubini ist $f(\bar{x}, \bar{k})$ quadratisch nach $\bar{x}$ integrierbar., denn f^2 ist nach $\bar{x}$ und $\bar{k}$ quadratisch integrierbar. Also existiert auch

$$g^*(f)(\bar{k}) = \int_{C_\mu} f(\bar{x}, \bar{k})\, g^*(\bar{x})\, d\sigma_{\bar{x}}$$

und ist bezüglich $\bar{k}$ messbar. Weiterhin gilt

$$\left| \int_{C_\mu} f(\bar{x}, \bar{k})\, g^*(\bar{x})\, d\sigma_{\bar{x}} \right|^2 \leq \int_{C_\mu} |f^2(\bar{x}, \bar{k})|\, d\sigma_{\bar{x}} \cdot \int_{C_\mu} |g^*(\bar{x})|^2\, d\sigma_{\bar{x}}$$

Das heisst aber $|g^*(f)\ (\bar{k})|^2 \leqslant A \int_{C_\mu} |f^2(\bar{x},\bar{k})|\, d\sigma_{\bar{x}}$

Da die rechte Seite wegen Fubini nach $\bar{k}$ integrierbar ist, muss es auch die linke sein.

Tensoralgebra über H

Sei $\mathcal{C}H = \{(a, f(\bar{k}_1), f(\bar{k}_1,\bar{k}_2),\ldots)\}$ mit

1) $f(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\ldots,\bar{k}_n)$ Element aus H^n

2) $\sum_{i=0}^{\infty} \|f(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\ldots,\bar{k}_n)\|^2 < \infty$

In dieser Menge werden folgende Operationen eingeführt:

a) Summe zweier Elemente $F = (a, f(\bar{k}_1),\ldots)$ und $G = (b, g(\bar{k}_1),\ldots)$ aus $\mathcal{C}H$:

$$F + G = (a+b,\ f(\bar{k}_1) + g(\bar{k}_1),\ldots)$$

b) Multiplikation eines Elementes aus $\mathcal{C}H$ mit einer Zahl:

$$\lambda F = (\lambda a,\ \lambda f(\bar{k}_1),\ldots)$$

c) Skalarprodukt zweier Elemente aus $\mathcal{C}H$:

$$(F, G) = \sum_{i=0}^{\infty} (f(\bar{k}_1,\ldots,\bar{k}_i),\ g(\bar{k}_1,\ldots,\bar{k}_i))$$

Die Operationen a) und b) führen nicht aus $\mathcal{C}H$ hinaus, das Skalarprodukt c) ist endlich.

Die letzte Aussage ergibt sich aus $|(f,g)| \leqslant \|f\|\cdot\|g\|$, was man wieder durch $\frac{1}{2}(\|f\|^2 + \|g\|^2)$ majorieren kann, und aus der zweiten Voraussetzung. Die erste Aussage ergibt sich dann aus $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + (f,g) + (g,f)$. Dass die Operation b) nicht aus $\mathcal{C}H$ hinausführt, ist evident.

In $\mathcal{T}H$ werden die Operatoren Multiplikation und Verjüngung eingeführt wie folgt.

a) Multiplikation von $F = (a, f(\bar{k}_1), f(\bar{k}_1,\bar{k}_2),\ldots)$ mit $g(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\ldots,\bar{k}_n)$: $g \cdot F =$

$$(o, \ldots, o, ag(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_n), g(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_n)\cdot f(\bar{k}_{n+1}),\ldots)$$

Es stehen am Anfang insgesamt n-1 Nullen.

b) Verjüngung von F mit $g(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\ldots,\bar{k}_n)$: $g^*(F) =$

$$\Big(\int_{C_\mu} g^*(\bar{x}_1\ldots\bar{x}_n)\, f(\bar{x}_1\ldots\bar{x}_n)\, d\sigma_{\bar{x}_1}\ldots d\sigma_{\bar{x}_n},$$

$$\int_{C_\mu} g(\bar{x}_1\ldots\bar{x}_n)\, f(\bar{x}_1\ldots\bar{x}_n,\bar{k}_1)\, d^{\sigma}_{\bar{x}_1}\ldots d^{\sigma}_{\bar{x}_n},\ldots \Big)$$

$$= (g^*(f(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_n)), g^*(f(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_n,\bar{k}_{n+1})),\ldots)$$

Beide Operationen sind linear und führen nicht aus $\mathcal{T}H$ hinaus. Sie sind ferner zueinander adjungiert, d.h. es gilt:

$$(g\cdot F, G) = (F, g^*(G))$$

Beweis: Die Linearität folgt unmittelbar aus der Definition. Weiterhin gilt

$$\sum_{i=o}^{\infty} \| g\cdot f(\bar{k}_{n+1}\ldots\bar{k}_{n+i})\|^2 = \sum_{i=o}^{\infty} \| g\|^2 \, \|f_i\|^2 < \infty$$

Es wird gezeigt, dass $\| g^*(f)\| \leq \| g\| \| f\|$. Der Einfachheit halber betrachten wir nur den Fall zweier Vektorvariablen $\bar{k}$. Gegeben seien $g(\bar{k}_1)$, $f(\bar{k}_1,\bar{k}_2)$ und $f(\bar{k}_1)$. Es ist

$$g^*(f(\bar{k}_1,\bar{k}_2)) = \int_{C_\mu} f(\bar{x},\bar{k}_1)\, g^*(\bar{x})\, d\sigma_{\bar{x}}$$

$$(f(\bar{k}_1),\ g^*(f(\bar{k}_1,\bar{k}_2))) = \int_{C_\mu}\Big[\overline{f^*(\bar{k}_1)}\cdot\int_{C_\mu} f(\bar{x},\bar{k}_1)\ g^*(\bar{x})\ d\sigma_{\bar{x}}\Big]d\sigma_{\bar{k}}$$

$$= \iint_{C_\mu} f(\bar{x},\bar{k}_1)\ g^*(\bar{x})\ f^*(\bar{k}_1)\ d\sigma_{\bar{x}}\ d\sigma_{\bar{k}} \leq \|f(\bar{x},\bar{k}_1)\|\cdot\|g(\bar{x})\cdot f(\bar{k}_1)\|$$

$$= \|f(\bar{x},\bar{k}_1)\|\cdot\|g(\bar{x})\|\cdot\|f(\bar{k}_1)\|$$

Setzt man für $f(\bar{k}_1)$ den Ausdruck $g^*(f(\bar{k}_1,\bar{k}_2))$, so findet man $\|g^*(f)\| \leq \|g\|\|f\|$. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|g^*(f_i)\|^2 \leq \|g\|^2\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|^2 < \infty$$

Damit ist gezeigt, dass $g^*(F)$ wieder Element von $\mathfrak{C}H$ ist.

$$(gF,\ H) = \sum_{i=o}^{\infty} (g(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_p)\cdot f(\bar{k}_{p+1}\ldots\bar{k}_{p+i}),\ h(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_{p+i}))$$

$$= \sum_{i=o}^{\infty}\int_{C_\mu} g^*(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_p)\ f(\bar{k}_{p+1}\ldots\bar{k}_{p+i})\ h(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_{p+i})\ d\sigma_{\bar{k}_1}\ldots d\sigma_{\bar{k}_{p+i}}$$

Wir setzen nun in den Elementen dieser Reihe $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_p$ anstatt $\bar{k}_1,\bar{k}_2,\ldots,\bar{k}_p$ und $\bar{k}_1,\bar{k}_2,\ldots,\bar{k}_i$ anstatt $\bar{k}_{p+1},\bar{k}_{p+2},\ldots,\bar{k}_{p+i}$. Man erhält so als i-tes Element

$$\int_{C_\mu} f^*(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_i)\cdot h(\bar{x}_1\ldots\bar{x}_p,\bar{k}_1\ldots\bar{k}_i)\cdot g^*(\bar{x}_1\ldots\bar{x}_p)\ d\sigma_{\bar{x}_1}\ldots d\sigma_{\bar{x}_p}\,d\sigma_{\bar{k}_1}\ldots d\sigma_{\bar{k}}$$

$$= (f(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_i),\ g^*(h(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_i)))$$

Diese Reihe ist also gleich $(F,\ g^*(H))$. Damit ist $(gF,\ H) = (F,\ g^*(H))$ bewiesen.

Symmetrische Funktionen

Eine Unterklasse der Funktionen aus H^n sind die symmetrischen Funktionen aus H^n. Die Funktion $f(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_n)$ heisst symmetrisch,

wenn für jede beliebige Permutation σ der Zahlen $1,2,\ldots,n$

$$f(\bar{k}_{\sigma 1},\bar{k}_{\sigma 2},\ldots,\bar{k}_{\sigma n}) = f(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\ldots,\bar{k}_n) \quad \text{gilt.}$$

Die Handhabung der Permutationen wird durch die Einführung der Permutationsoperatoren σ erleichtert. Wir definieren

$$\sigma f(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_n) = f(\bar{k}_{\sigma 1}\ldots\bar{k}_{\sigma n})$$

Der Operator σ hat folgende Eigenschaften:

1) Er ist linear
2) $\sigma(\tau f) = (\sigma\tau) f$
3) $(\sigma f, \sigma g) = (f, g)$

Die beiden ersten Eigenschaften findet man leicht durch Nachrechnen, die dritte ist eine Folge des Satzes von Fubini, der besagt, dass bei der Anwendung mehrfacher Integrale die Reihenfolge der einzelnen Integrationen gleich ist.

Uber H^n lässt sich ein symmetrisierender Operator erklären, der jede Funktion aus H^n in eine symmetrische Funktion des Raumes H^n überführt.

Definition: $$S = \frac{1}{n!} \sum_{G_\sigma} \sigma$$

Hier ist G_σ die Gruppe der Permutationen.

S hat folgende Eigenschaften:

1) $\sigma S = S$ 2) $S^2 = S$
3) $S = S^*$ (adjungierter Operator)
4) S ist linear und beschränkt
5) Symmetrische Funktionen werden von S in sich selbst überführt.

Diese Beziehungen beweist man leicht durch Nachrechnen. Sind $f \in H^m$ und $g \in H^n$ symmetrische Funktionen, so braucht $f \cdot g \in H^{m+n}$ gleichwohl nicht symmetrisch zu sein. Man kommt zu einem symmetrischen Produkt, indem man definiert:

$$f \vee g = S (f \cdot g)$$

Für das symmetrische Produkt gelten folgende Beziehungen

1) $f \vee S g = S f \vee g = f \vee g$
2) $f \vee (g \vee h) = (f \vee g) \vee h$
3) $f \vee g = g \vee f$

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Ebenso wie in H^n können wir auch in $\mathfrak{T} H$ einen symmetrischen Unterraum finden durch die Definition

$$S \mathfrak{T} H = SF = (a, Sf(\bar{k}_1), \ldots, Sf(\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n) \ldots)$$

SF gehört ebenfalls H an, denn es gilt:

$$\| Sf \|^2 = (Sf, Sf) = (SS^* f, f) = (Sf, f) =$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{G_\sigma} (\sigma f, f) \leq \frac{1}{n!} \sum_{G_\sigma} | (\sigma f, f) | \frac{1}{n!} \sum_{G_\sigma} \| f \|^2 = \| f \|^2$$

Mittels der Funktionen $u(\bar{k})$ aus H werden über $S \mathfrak{T} H$ die Operatoren

$$\underset{\sim}{u} = S u(\bar{k}) \S = S u(\bar{k}) = u(\bar{k}) \vee$$

und

$$\underset{\sim}{u}^* = S u^*(\bar{k}) S = \text{Kontraktion mit } u(\bar{k})$$

definiert.

Unter dem Kommutator zweier Operatoren A und B : $[A,B]_-$ versteht man den Operator $A\,B - B\,A$. Es gilt nun folgender wichtige Satz:

$f(\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n)$ sei ein Element aus H^n. Es gilt

$$\left[(n+1)\,\underset{\sim}{u^*}\,\underset{\sim}{v} - n\,\underset{\sim}{v^*}\,\underset{\sim}{u}\right] f = (u, v)\, f$$

Beweis: Es sei $G_\sigma^i = \{\sigma \text{ aus } G \,/\, \sigma 1 = i\}$. Dann gilt

$$G_\sigma = \bigcup_{i=1}^{n} G_\sigma^i \qquad G_\sigma^i \cap G_\sigma^j = \emptyset \quad i \neq j$$

$$\underset{\sim}{u^*}\,\underset{\sim}{v}\,\varphi = u^*(S\,v\,f)$$

$$(a) \quad S\,v\,f = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{G_\sigma^{n+1}} v(\bar{k}_{\sigma 1})\, f(\bar{k}_{\sigma 2} \ldots \bar{k}_{\sigma\, n+1})$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{G_\sigma^i} v(\bar{k}_i)\, f(\bar{k}_{\sigma 2} \ldots \bar{k}_{\sigma\, n+1})$$

Da die Funktion f nach Voraussetzung symmetrisch ist, erhält man

$$S\,v\,f = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=1}^{n+1} n!\; v(\bar{k}_i)\, f(\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_{i-1}, \bar{k}_{i+1} \ldots \bar{k}_{n+1})$$

Zieht man $n!$ vor das Summenzeichen, so erhält man den Faktor $\frac{1}{n+1}$. Wir setzen nun I als Abkürzung für das invariante Integral mit der Integrationsvariablen $\bar{x}$. Wir finden

$$u^*(S\,v\,f) = \frac{1}{n+1}\Big[I\, u^*(\bar{x})\, v(\bar{x})\, f(\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n) + \sum_{i=1}^{n} I\, u^*(\bar{x})\, v(\bar{k}_i)\, f(\bar{x}, \bar{k}_1 \ldots \bar{k}_{i-1}, \bar{k}_{i+1} \ldots \bar{k}_n)\Big]$$

$$(b) \quad \underset{\sim}{v}\,\underset{\sim}{u^*} f = S\,v\,u^* f$$

$$S\,v\,u^*(f) = \frac{1}{n!} \sum_{G_\sigma} I\, u^*(\bar{x})\, v(\bar{k}_{\sigma 1})\, f(\bar{x}, \bar{k}_{\sigma 2} \ldots \bar{k}_{\sigma n})$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I\, u^*(\bar{x})\, v(\bar{k}_i)\, (\bar{x}, \bar{k}_1 \ldots \bar{k}_{i-1}, \bar{k}_{i+1} \ldots \bar{k}_n)$$

Vergleich von (a) und (b) liefert die angekündigte Gleichung. Ihre Abhängigkeit von n kann durch die Einführung des Operators $\sqrt{N}$ beseitigt werden.

Def. $\sqrt{N}\ F = (\sqrt{0}\,a,\ \sqrt{1}\,f(\overline{k}),\ \sqrt{2}\,f(\overline{k}_1,\overline{k}_2),\ldots)$

Der Operator $\sqrt{N}$ kann aus $\mathfrak{H}$ hinausführen.

Er hat ferner folgende Eigenschaften:

1) $\sqrt{N}$ ist selbstadjungiert

2) $\sqrt{N}\,S = S\sqrt{N}$

3) $\sqrt{N}\,u = u\sqrt{N+1}$

4) $\sqrt{N+1}\,u = u\sqrt{N}$

Mit den so gewonnenen Hilfsmitteln lassen sich nunmehr über $\mathfrak{H}$ Operatoren erklären, deren Kommutationseigenschaften denen der Feldoperatoren der Quantenmechanik sehr ähnlich sind.

Def: $a(u) = \underset{\sim}{u}^*\sqrt{N}$

$\overset{*}{a}(u) = \sqrt{N}\,\underset{\sim}{u}$

Es gilt:

$[a(u),a(v)]_- = 0 \qquad [a^*(u),a^*(v)]_- = 0$

$[a(u),a^*(v)]_- = (u,v)I$

Beweis: $a^*(u)a^*(v) = \sqrt{N}\,\underset{\sim}{u}\sqrt{N}\,\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{u}\sqrt{N+1}\,\sqrt{N}\,\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{u}\,\underset{\sim}{v}\,\sqrt{N+1}\,\sqrt{N+2}$

$a(v)a(u) = \underset{\sim}{v}\underset{\sim}{u}\sqrt{N+1}\sqrt{N+2}$

$\underset{\sim}{u}\underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{v}\underset{\sim}{u} = Suv - Svu = 0$

Damit ist die zweite Vertauschungsregel bewiesen. Die erste folgt durch Adjunktion.

$a(u)\overset{*}{a}(v) = \underset{\sim}{u}^*\sqrt{N}\sqrt{N}\,\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{u}^*N\,\underset{\sim}{v} = N+1\underset{\sim}{u}^*\underset{\sim}{v}$

$a^*(v)a(u) = N\underset{\sim}{v}\underset{\sim}{u}^*$

Aus dem vorangehenden Satz folgt dann:

$(N+1)\underset{\sim}{u}^*\underset{\sim}{v} - N\underset{\sim}{v}\underset{\sim}{u}^* = (u,v)I$

Der Feldoperator $A(\bar{x})$.

Die Funktion $\psi(\bar{x})$ wurde definiert durch

$$\psi(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{C_+} f(\bar{k}) e^{i(\bar{k},\bar{x})} \, d\tau_{\bar{k}}$$

wobei $f(\bar{k})$ höchstens auf dem positiven Ast des Massenhyperboloids von Null verschieden ist. Wir nennen den Bereich der $\psi(\bar{x})$ den $\bar{x}$-Raum, den Bereich der $f(\bar{k})$ den $\bar{k}$-Raum.

Zur Definition des Feldoperators benötigen wir folgende der Dirac'schen δ-Funktion verwandte uneigentliche Funktion:

$$\Delta^+(\bar{x}) = \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int_{C_+} \theta(\bar{k}) e^{i(\bar{k},x)} \, d\tau_{\bar{k}}$$

$\theta(\bar{k})$ ist nur auf dem positiven Ast des Massenhyperboloids von Null verschieden und dort gleich 1.

$$\Delta^-(\bar{x}) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int_{C_-} \theta(-\bar{k}) e^{i(\bar{k},\bar{x})} \, d\tau_{\bar{k}}$$

$$\Delta(\bar{x}) = \Delta^+(\bar{x}) + \Delta^-(\bar{x}).$$

Im $\bar{k}$-Raum ist $\Delta^+(\bar{x})$ repräsentiert durch

$$\frac{-i}{2(2\pi)^{3/2}} \theta(\bar{k})$$

Für $\Delta^-(\bar{x})$ und $\Delta(\bar{x})$ gilt das Entsprechende.

Die Quantenfeldtheorie fusst auf Operatorfeldern, d.h. auf Operatoren, die Funktion einer Variablen $\bar{x}$ sind. Um Verwechslung mit der Variablen der Feldfunktionen $\psi(\bar{x})$ zu vermeiden, werden diese weiterhin mit der Variablen $\bar{\xi}$ geschrieben.

In $\mathfrak{H}$ werden folgende Operatoren betrachtet :

$a(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}))$ im $\bar{k}$-Raum: $a\left(\frac{-i}{2(2\pi)^{3/2}} \theta(\bar{k}) e^{-i(\bar{k},\bar{x})}\right)$

$a^*(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}))$ im $\bar{k}$-Raum: $a^*\left(\frac{-i}{2(2\pi)^{3/2}} \theta(\bar{k}) e^{-i(\bar{k},\bar{x})}\right)$

Mittels $a\,(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}))$ und $a^*(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}))$ wird der Operator

$$A(\bar{x}) = \sqrt{2}\left[a\,(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x})) + a^*(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}))\right]$$

definiert. $A(\bar{x})$ hat folgende Eigenschaften :

1) $A(\bar{x})$ genügt als Funktion von $\bar{x}$ formal der Klein-Gordongleichung.
2) $A(\bar{x})$ ist selbstadjungiert.
3) Es gilt die Vertauschungsrelation

$$\left[A(\bar{x})\,A(\bar{x}')\right]_- = \frac{i}{2}\Delta(\bar{x}-\bar{x}')$$

Beweis: Die erste Eignschaft beweist man durch Einsetzen in die Klein-Gordon-Gleichung, da wir $\bar{k}$ als auf dem Massenhyperboloid liegend annehmen. Die zweite Eigenschaft folgt unmittelbar aus der Definition. Um die dritte Eigenschaft zu beweisen, bemerken wir, dass für jedes $\psi(\bar{\xi})$ aus H gilt:

$$(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}),\psi(\bar{\xi})) = \int_{C_m} \frac{i}{2(2\pi)^{3/2}}\,\Theta(\bar{k})\,e^{i(\bar{k},\bar{x})}\,f(\bar{k})\,d\sigma_{\bar{k}}$$

$$= \frac{i}{2}\psi(\bar{x})$$

Für die Operatoren $a\,(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}))$ und $a^*(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}))$ gelten folgende Vertauschungsregeln, die sich aus dem letzten Satz des vorigen Abschnitts ergeben:

$$\left[a\,(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x})),\ a\,(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}'))\right]_- = 0$$

$$\left[a^*(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}),\ a^*(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}'))\right]_- = 0$$

$$\left[a\,(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x})),\ a^*(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}'))\right]_- = (\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}),\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}))$$

$$= \frac{i}{2}\Delta^+(\bar{x}-\bar{x}').$$

Damit kann man nun $\left[A(\bar{x})\ A(\bar{x}')\right]_-$ ausrechnen:

$$\begin{aligned}\left[A(\bar{x}),\ A(\bar{x}')\right]_- &= 2\left[a\,(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x})),\ a\,(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}))\right]_- \\ &+ 2\left[a^*(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x})),\ a\,(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}'))\right]_- \\ &+ 2\left[a\,(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x})),\ a^*(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}'))\right]_- \\ &+ 2\left[a^*(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x})),\ a\,(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}'))\right]_-\end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden der rechten Seite sind Null. Die Summe der beiden letzten ist

$$i\left(\Delta^+(\bar{x}-\bar{x}') - \Delta^+(\bar{x}'-\bar{x})\right) .$$

Da aber $\Delta^+(-\bar{x}) = -\Delta^-(\bar{x})$ ist, folgt daraus die dritte Eigenschaft.

Lorentzinvarianz.

Im zweiten Abschnitt (S.3) wurde die Basisunabhängigkeit des invarianten Integrals für eigentliche Lorentztransformationen festgestellt. Der Beweis kann auf die orthochronen Lorentz - transformationen ausgedehnt werden, d.h. solche, die die Orientierung der Zeitachse aber nicht die der Raumachse beibehalten. Die vorkommenden Funktionen werden dabei als skalare Funktionen behandelt.

Ein anderer Standpunkt ist der, die Vektoren des Raumes zu transformieren und $\psi(\bar{x})$ dabei mitwandern zu lassen: Wenn $\bar{\xi}$ in $L\,\bar{\xi}$ übergeht, geht $\psi(\bar{\xi})$ in $(L\psi)(\bar{\xi})$ über, so dass gilt:

$$\psi(\bar{\xi}) = (L\psi)(L\bar{\xi}) \quad \text{oder} \quad (\quad)$$

$$(L\psi) (\bar{\xi}) \quad = \quad \psi(L^{-1} \bar{\xi})$$

Hierdurch wird eine Darstellung der Gruppe der orthochronen Lorentztransformationen definiert.

Man kann die Definition auf Translationen im $\bar{x}$-Raum erweitern. Wenn $\bar{\xi}$ in $\bar{\xi} + \bar{d}$ übergeht, dann soll gelten

$$(T_{\bar{d}} \psi)(\bar{\xi}+\bar{d}) \quad = \quad \psi(\bar{\xi}) \qquad \text{oder}$$

$$(T_{\bar{d}} \psi) (\bar{\xi}) \quad = \quad \psi (\bar{\xi}-\bar{d})$$

Dadurch erhält man eine Darstellung der inhomogenen Lorentzgruppe. Im $\bar{k}$-Raum wirken sich diese Transformationen folgendermassen aus:

$$(L\psi)(\bar{\xi}) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{C_\mu} f(\bar{k}) \; e^{\,i(\bar{k}, L^{-1}\bar{\xi})} \; d\tilde{\sigma}_{\bar{k}}$$

Nun gilt wegen der Basisunabhängigkeit des invarianten Integrals

$$\int_{C_\mu} f(L\bar{k}) \; d\tilde{\sigma}_{\bar{k}} \quad = \quad \int_{C_\mu} f(\bar{k}) \; d\tilde{\sigma}_{\bar{k}} \qquad \text{also}$$

$$\int_{C_\mu} f(\bar{k}) \; e^{i(\bar{k}, L^{-1}\bar{\xi})} d\tilde{\sigma}_{\bar{k}} \quad = \quad \int_{C_\mu} f(L^{-1}\bar{k}) \; e^{i(L^{-1}\bar{k}, L^{-1}\bar{\xi})} \; d\tilde{\sigma}_{\bar{k}}$$

$$= \quad \int_{C_\mu} f(L^{-1}\bar{k}) \; e^{i(\bar{k}, \bar{x})} \; d\tilde{\sigma}_{\bar{k}} \; .$$

L transformiert also im $\bar{k}$-Raum wie im $\bar{x}$-Raum.

$$(T_{\bar{d}} \psi)(\bar{x}) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{C_\mu} f(\bar{k}) \; e^{i(\bar{k}, \bar{x}-\bar{d})} \; d\tilde{\sigma}_{\bar{k}}$$

$T_{\bar{d}}$ transformiert im $\bar{k}$-Raum durch Hinzufügen des Faktors $e^{-i(\bar{k}, \bar{d})}$. Das Skalarprodukt $\int_C f^*(\bar{k}) \; g(\bar{k}) \; d\tilde{\sigma}_{\bar{k}}$ ist gegen beide Transformationen invariant. Bei Anwendung von $T_{\bar{d}}$ hebt sich der Faktor $e^{-i(\bar{k}, \bar{d})}$ gegen seinen konjugiert-komplexen $e^{i(\bar{k}, \bar{d})}$ auf.

Analog lässt sich auch für Mehrteilchenzustände eine Darstellung der inhomogenen Lorentzgruppe erreichen durch:

$$(L\psi)(\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2,\ldots,\bar{\xi}_n) = \psi (L^{-1}\bar{\xi}_1, L^{-1}\bar{\xi}_2,\ldots, L^{-1}\bar{\xi}_n)$$

$$(T_{\bar{a}}\psi)(\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2,\ldots,\bar{\xi}_n) = \psi (\bar{\xi}_1-\bar{a}_1,\bar{\xi}_2-\bar{a}_2,\ldots,\bar{\xi}_n-\bar{a}_n)$$

Die Erweiterung auf $\mathcal{Y}H$ und $S\mathcal{Y}H$ erfolgt analog.

Der Energie-Impuls-Operator

Der Energie-Impuls-Operator eines Teilchenzustandes $\psi(\bar{\xi}_1 \ldots \bar{\xi}_n)$ wird durch einen Infinitesimaloperator mit Hilfe der Translation $T_{\bar{a}}$ definiert.

Definition: $$P(\bar{a}) = i\hbar \lim_{\lambda\to 0} \frac{T_{\bar{a}} - I}{\lambda}$$

Die Energiekomponente des Operators ist

$$P(\bar{e}_o) = i\hbar \lim_{\lambda\to 0} \frac{T_{\bar{e}_o} - I}{\lambda}$$

Der Operator wirkt so:

$$\Big(\lim_{\lambda\to 0} i\hbar \frac{T_{\bar{e}_o} - I}{\lambda} \psi \Big)(\bar{\xi}_1\cdots\bar{\xi}_n) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\psi(\bar{\xi}_1 - \bar{a}\ldots\bar{\xi}_n - \bar{a}) - \psi(\bar{\xi}_1\cdots\bar{\xi}_n)}{\lambda}$$

Das ist nach Taylor (ψ ist 2-mal stetig differenzierbar)

$$- i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1^o} + \cdots + \frac{\partial}{\partial \xi_n^o} \right] \psi$$

Im $\bar{k}$-Raum ergibt das :

$$P(\bar{e}_o)\, f(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{k}_1\ldots\bar{k}_n)\cdot \sqrt{\vec{k}_i^2 + \mu^2}$$

Den Erwartungswert für die Energie eines Teilchenzustandes erhält man durch Bildung des Skalarprodukts

$$(\psi, P(\bar{e}_o)\psi) = (f(\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n), (\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\bar{k}_i^2 + \mu^2}) f(\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n)) \geq 0$$

Hier liegt die Ursache für den Verzicht auf den negativen Ast des Massenhyperboloids.

Fortsetzung der Lorentzinvarianz.

Die Operatoren der Quantenfeldtheorie liefern physikalische Aussagen durch Bildung der Skalarprodukte. $(\psi, O\psi)$, wobei O der betreffende Operator, ψ ein Element von $S \subset H$, im $\bar{x}$-Raum betrachtet, ist. Unter der Lorentzinvarianz dieser Skalarprodukte versteht man nun folgendes:
Sei der untersuchte Operator der Feldoperator $A(\bar{x})$. Es muss dann sein

$$(*) \qquad (L\psi, A(L\bar{x})\, L\phi) = (\psi, A(\bar{x})\phi)$$

Wegen $(L\psi, L\phi) = (\psi, \phi)$ ergibt sich: $(L\psi, A(L\bar{x})\, L\phi) = (\psi, L^{-1}A(L\bar{x})\, L\phi)$ und das für jedes Paar ψ, ϕ. Also muss $L^{-1}A(L\bar{x})L = A(\bar{x})$ oder $A(L\bar{x}) = L\, A(\bar{x})\, L^{-1}$ sein, damit die Gleichung $(*)$ gilt. Der Beweis hierfür wird für $a^*(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}))$ geführt:

$$a^*(\Delta^+(\bar{\xi}-L\bar{x})) = a^*(\Delta^+(L^{-1}\bar{\xi}-\bar{x})) = a^*(L\,\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}))$$

$$= L\, a\, (\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}))\, L^{-1}$$

Die letzte Gleichung erhält man, wenn man bedenkt, dass der

Operator a^* eine Multiplikation mit der Funktion Δ^+ bedeutet. Für $a\,(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}))$ erhält man dieselbe Aussage durch Adjunktion.

Für die Translation $T_{\bar{d}}$ ergibt sich Folgendes:

$$A(\bar{x}+\bar{d}) = T_{\bar{d}}\, A(\bar{x})\, T_{\bar{d}}^{-1}\,.$$

$$a^*(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}-\bar{d})) = a^*(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{d}-\bar{x}) = a\,(T_{\bar{d}}\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}))$$

$$= T_{\bar{d}}\, a^*(\Delta^+(\bar{\xi}-\bar{x}))\, T_{\bar{d}}^{-1}$$

Für den Energie-Impulsoperator findet man:

$$P(L\bar{d}) = \lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{T_{\lambda L\bar{d}} - I}{\lambda} = \frac{LT_{\bar{d}}L^{-1} - I}{\lambda} = L\,\frac{T_{\bar{d}} - I}{\lambda}\,L^{-1}\right]$$

$$= L\,P(\bar{d})\,L^{-1}$$

$$(L\,T_{\bar{d}}\,L^{-1})\,\psi(\bar{\xi}) = (L\,T_{\bar{d}})\,\psi(L\bar{\xi}) = L\,\psi(L\bar{\xi}-\bar{d}) =$$

$$\psi(L^{-1}(\bar{\xi}-\bar{d})) = \psi(\bar{\xi}-L\bar{d}) = T_{L\bar{d}}\,\psi$$

Für die Translation $T_{\bar{d}}$ ergibt sich offenbar

$$T_{\bar{b}}\,P(\bar{d})\,T_{\bar{b}}^{-1} = P(\bar{d})$$

Bibliographie

(1) D. Kastler — Sur l'espace de la théorie quantique des champs. Ann. Univ. Sarav. IV,3

(2) D. Kastler — Créateurs et annihilateurs sur un espace de dimension n .

(3) D. Kastler — Dimension Mathématique de l'équation de Dirac

(4) D. Kastler — La quantification du champ de Maxwell en tant qu' algébre symétrique sur un espace de Hilbert.

(5) D. Kastler — La quantification du champ de Dirac en tant qu'algèbre de Grassmann sur un espace de Hilbert.

(2) bis (5) in Ann. Univ. Sarav. V, 2/3 .

(6) Riesz-Nagy — Leçons d'analyse fonctionelle

(7) H. Boerner — Darstellung von Gruppen mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik Springer 1955